



TITLE:

様相述語論理のKripke bundle semanticsに関する不完全性(非古典論理とそのKripke意味論に関する諸問題)

AUTHOR(S):

磯田, 恵以子

CITATION:

磯田, 恵以子. 様相述語論理のKripke bundle semanticsに関する不完全性(非古典論理とそのKripke意味論に関する諸問題). 数理解析研究所講究録 1995, 927: 16-31

ISSUE DATE:

1995-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59918>

RIGHT:

様相述語論理の Kripke bundle semantics に関する不完全性

津田塾大学数学計算機科学研究所 磯田恵以子 (Eiko Isoda)

概要

Kripke semantics は中間論理や様相論理でよく用いられてきたが、述語論理においては Kripke semantics に関して不完全な論理が多く存在する。Kripke bundle [3] と C-set semantics [1] [2] は標準的 Kripke semantics の個体間の関係をより詳細に表現したものとして知られている。

[1] で Q -S4.1 が Kripke semantics に関して不完全であることが示されているが、Kripke bundle と C-set semantics との違いを表現するような論理式を用いることで同様に Kripke bundle semantics に関して不完全であることを示すことができる。ここでは、同様の方針で [2] の Kripke semantics に関する不完全性の結果を Kripke bundle semantics に関する不完全性に拡張することを考える。

n 項述語記号 P_j^n, Q_j^n, \dots ($n \geq 0, j \geq 0$)、個体変数 x_0, x_1, \dots 、論理記号 \vee (or), \wedge (and), \neg (not), \rightarrow (if..then), \forall (for all), \exists (there is), \Box (necessity) から作られる論理式を考え、 A, B, \dots で論理式を表すものとする。また、 $A(\vec{x})$ で、論理式 A のすべての自由変数が変数の列 \vec{x} に含まれることを意味することとする。

ここでは様相論理 S4 の拡大のみを考える。

1 Kripke bundle semantics と C-set semantics の定義

この章では、標準的 Kripke semantics を拡張したもので、V. B. Shehtman and D. P. Skvortsov [3] によって導入された Kripke bundle semantics と S. Ghilardi [1] によって導入された C-set semantics の定義を繰り返す。

定義 1.1 (Kripke bundle semantics) 擬順序集合 $\mathbf{D} = \langle D, \rho \rangle$ と $\mathbf{W} = \langle W, R \rangle$ と D から W への全射写像 π の 3 重対 $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が *Kripke bundle* とは、

1. すべての $a, b \in D$ に対して、 $a \rho b$ ならば $\pi(a) R \pi(b)$
2. すべての $a \in D, w \in W$ に対して、 $\pi(a) R w$ ならば $a \rho b, \pi(b) = w$ となる $b \in D$ がある

をみたすことをいう。

空でない集合 U に対して、 $\mathcal{L}[U]$ で \mathcal{L} に各 $u \in U$ の名前 \bar{u} を新しい定数として加えたものとする。 $\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の各論理式 A と $w R w'$ となる $w' \in W$ に対して、 A の w' における *inheritor* とは、 A の中の \bar{u} ($u \in \pi^{-1}(w)$)

の occurrences をすべて $v \in \pi^{-1}(w')$, upv となるような \bar{v} で置き換えたものをいう。ただし、同じ \bar{u} の occurrences は同じ \bar{v} で置き換えるものとする。 $w \in W$ と $\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の原始閉論理式の 2 項関係 \models を Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ 上の *valuation* という。これを次のように $w \in W$ と $\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の閉論理式との 2 項関係に拡張する。

$$w \models A \wedge B \iff w \models A \text{ かつ } w \models B$$

$$w \models A \vee B \iff w \models A \text{ または } w \models B$$

$$w \models \neg A \iff w \models A \text{ ではない}$$

$$w \models A \rightarrow B \iff w \models A \text{ ならば } w \models B$$

$$w \models \exists x_i A(x_i) \iff w \models A(\bar{u}) \text{ となる } u \in \pi^{-1}(w) \text{ が存在する}$$

$$w \models \forall x_i A(x_i) \iff \text{すべての } u \in \pi^{-1}(w) \text{ に対して } w \models A(\bar{u})$$

$$w \models \Box A \iff wRw' \text{ となるすべての } w' \in W \text{ と } A \text{ の } w'$$

におけるすべての inheritor A' に対して、

$$w' \models A'$$

\mathcal{L} の論理式 A が Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で *valid* とは、 $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ 上のすべての valuation \models とすべての $w \in W$ に対して、 $w \models \bar{A}$ となることをいう。ここで、 \bar{A} は A の universal closure である。 \mathcal{L} の論理式 A が Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で *strongly valid* とは、 A のすべての代入形が valid であることをいう。様相命題論理 L に対して、Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が L の Kripke bundle とは、 L のすべての theorem が

$\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で strongly valid であることをいう。

定理 1.2 任意の論理式に対して、 $Q\text{-}S4$ で証明可能であることと、すべての *Kripke bundle* で strongly valid であることは同等である。

定義 1.3 (**C-set semantics**) (small) category \mathbf{C} に対して、**C-set** とは、functor $X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ のことをいい、**C-set** X の **C-subset** P とは、 \mathbf{C} の object に添字付けられた $P_\alpha \subseteq X(\alpha)$ のあつまりのことをいう。(small) category \mathbf{C} とすべての **C-objects** α に対して $X(\alpha) \neq \emptyset$ であるような **C-set** X と各述語記号 P_j^n に product **C-set** X^n のある **C-subset** $I(P_j^n)$ を対応させる関数 I から成る 3 重対 $\langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ を (**C-**)*model* という。

\mathbf{C} の object α について、関数 $\mu : \mathbf{N} \rightarrow X(\alpha)$ を α -assignment と呼ぶ。ここで、 \mathbf{N} は自然数の全体から成る集合である。 μ が α -assignment で $a \in X(\alpha)$ のとき、 μ_i^a で、 i に対しては a をとりその他では μ と同じ値をとるような α -assignment を表すものとする。また、 μ が α -assignment で $k : \alpha \rightarrow \beta$ が \mathbf{C} の arrow のとき、 $k\mu$ で $(k\mu)(i) = X(k)(\mu(i))$ と定義される β -assignment を表す。

model $\mathcal{M} = \langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ 、 α -assignment μ 、論理式 A が与えられた時、 A が α -assignment μ のもとで α において真である ($\mu \models_\alpha A$ と書く) ことを次のように定義する。

$$\mu \models_\alpha P_j^n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \iff \langle \mu(i_1), \dots, \mu(i_n) \rangle \in (I(P_j^n))_\alpha$$

$$\mu \models_\alpha A \wedge B \iff \mu \models_\alpha A \text{ かつ } \mu \models_\alpha B$$

$$\mu \models_{\alpha} A \vee B \iff \mu \models_{\alpha} A \text{ または } \mu \models_{\alpha} B$$

$$\mu \models_{\alpha} \neg A \iff \mu \models_{\alpha} A \text{ ではない}$$

$$\mu \models_{\alpha} A \rightarrow B \iff \mu \models_{\alpha} A \text{ ならば } \mu \models_{\alpha} B$$

$$\mu \models_{\alpha} \exists x_i A \iff \mu_i^a \models_{\alpha} A \text{ となるような}$$

$a \in X(\alpha)$ が存在する

$$\mu \models_{\alpha} \forall x_i A \iff \text{すべての } a \in X(\alpha) \text{ に対して、}$$

$$\mu_i^a \models_{\alpha} A$$

$$\mu \models_{\alpha} \Box A \iff \text{すべての } \beta \text{ とすべての } k : \alpha \rightarrow \beta$$

に対して、 $k\mu \models_{\beta} A$

$a_1, \dots, a_n \in X(\alpha)$ のとき、 \mathcal{L} を $X(\alpha)$ の元に対する名前を含む \mathcal{L}_{α} に拡張して、 $\models_{\alpha} A(a_1, \dots, a_n)$ によって、 $\mu(i_1) = a_1, \dots, \mu(i_n) = a_n$ であるようなある μ に対して $\mu \models_{\alpha} A$ となることを表すものとする。

model $\mathcal{M} = \langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ と論理式 A が与えられた時、すべての α -assignment μ に対して $\mu \models_{\alpha} A$ のとき $\models_{\alpha} A$ と表し、すべての object α に対して $\models_{\alpha} A$ のとき $\mathcal{M} \models A$ と表す。 \mathbf{C} -set X と論理式 A が与えられた時、すべての I に対して $\langle \mathbf{C}, X, I \rangle \models A$ のとき $\langle \mathbf{C}, X \rangle \models A$ と表し、 A は $\langle \mathbf{C}, X \rangle$ で valid であるという。また、category \mathbf{C} と論理式 A が与えられた時、すべての \mathbf{C} -set X に対して $\langle \mathbf{C}, X \rangle \models A$ のとき $\mathbf{C}^{\wedge} \models A$ と書く。 \mathcal{L} の論理式 A が \mathbf{C} -set で *strongly valid* であるとは、そのすべての代入形が \mathbf{C} -set で valid であることをいう。様相論理 L に対して、 L の \mathbf{C} -set とは、 L の

すべて theorems がその **C-set** で strongly valid であることをいう。

定理 1.4 任意の論理式に対して、*Q-S4* で証明可能であることと、すべての **C-set** で strongly valid であることは同等である。

2 *Q-S4.1* の Kripke bundle semantics に関する不完全性

Kripke bundle においては、 $A(c)$ が w における $A(a)$ の inheritor で $A(d)$ が w における $A(b)$ の inheritor ならば $B(c, d)$ も w における $B(a, b)$ の inheritor であるが、**C-set** においては、 a を c に写すようなある arrow $v \rightarrow w$ に対応する写像と b を d に写すようなある arrow $v \rightarrow w$ に対応する写像が存在するとしても、 a, b をそれぞれ c, d に写すようなものが存在するとは限らない。

これらのことを考えると、ある条件のもとで Kripke bundle では必ず strongly valid になり、ある **C-set** では strongly valid にならないような論理式を作ることができる。

補題 2.1 Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ において、 $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ が strongly valid ならば、

$$\begin{aligned} \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \neg P_1^1(y) \\ \rightarrow \exists u \{ \neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u) \}] \end{aligned}$$

も strongly valid である。

補題 2.2 category **C** を、object がただ 1 つ α で arrow が 1_α (identity arrow) と f ($f \circ f = f$) であるようなものとし、**C-set** X を、 $X(\alpha) =$

$\{a, b, c\}$, $X(1_\alpha) = id_{\{a, b, c\}}$, $X(f) = h$ ($h(a) = h(b) = h(c) = c$) とする。

すると $\langle \mathbf{C}, X \rangle$ において、 $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ は *strongly valid* になるが、

$$\begin{aligned} \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \neg P_1^1(y) \\ \rightarrow \exists u \{ \neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u) \}] \end{aligned}$$

は *valid* ではない。

$S4.1$ は $S4$ に公理図式として

$$\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p.$$

を加えたものである。

様相述語論理 L が Kripke bundle semantics に関して完全であるとは、 L で証明不可能な任意の論理式 A に対して、 A を *strongly valid* にしないような L の Kripke bundle が存在することをいう。

補題 2.2 より、論理式

$$\begin{aligned} \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \neg P_1^1(y) \\ \rightarrow \exists u \{ \neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u) \}] \end{aligned}$$

は $Q-S4.1$ で証明不可能であることがわかり、補題 2.1 から $Q-S4.1$ の Kripke bundle でこの論理式を *strongly valid* にしないようなものが存在しないことから、 $Q-S4.1$ は Kripke bundle semantics に関して不完全であることがわかる。

さらに、[1] と同様にこれを次のように強くすることができる。

定理 2.3 (a). T を補題 2.2 で定義した \mathbf{C} -set において *strongly valid* になるような論理式の集合とし、 L を $Q\text{-}S4.1 \subseteq L \subseteq Q\text{-}S4.1+T$ であるような様相述語論理であるとする、 L は *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

(b). $S4.1$ を含み、論理式 $\Diamond p \rightarrow p$ を含まないような様相命題論理 L の最小述語拡大 $Q\text{-}L$ は *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

3 ある様相述語論理の Kripke bundle semantics に関する不完全性

この章では、前章の論理式と類似な論理式を用いることで、[2] の Kripke semantics に関する結果を Kripke bundle semantics に関するものに書き換える。

定義 3.1 ([2]) 2つの擬順序集合 $\langle P, \leq \rangle$ と $\langle Q, \leq \rangle$ の間の順序を保存する写像 μ が埋め込みであるとは、単射でさらに

$$\alpha_1, \alpha_2 \in P, \mu(\alpha_1) \leq \mu(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$$

をみたすことをいう。また、 P が Q に埋め込めるとは、 P から Q への埋め込みが存在することをいい、 P が Q に局所的に埋め込めるとは、すべての $\alpha \in Q$ に対し P から $\uparrow \alpha (= \{\beta \in Q \mid \alpha \leq \beta\})$ への埋め込みが存在することをいう。

定義 3.2 ([2]) category \mathbf{C} とその object α に対して、 α を domain とする arrow の全体からなる集合上に

$$k_1 \leq k_2 \iff l \circ k_1 = k_2 \text{ となる arrow } l \text{ がある}$$

が定義された擬順序 $\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{C})$ を考える。これらの *disjoint union* $\Sigma_{\alpha \in C_0} \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{C})$ を $\mathcal{F}(\mathbf{C})$ と書く。

定義 3.3 ([2]) \mathbf{M}_∞^n を $\{1, \dots, n\}$ で生成される自由モノイドとする。これは $\{1, \dots, n\}$ の中からの有限列全体から成り、連鎖 $*$ を積とし、空列 ε を単位元とする。 $\mathcal{F}(\mathbf{M}_\infty^n)$ は無限 n 分木 \mathbf{T}_∞^n である。

\mathbf{M}_m^n を $\{1, \dots, n\}$ の中からの長さ m 以下の列全体から成り、切り詰めた連鎖（2つの列の連鎖を長さ m で切ったもの）を積とし、空列 ε を単位元とするモノイドとする。 $\mathcal{F}(\mathbf{M}_m^n)$ は \mathbf{T}_∞^n のうち m より高い部分を切り落とした木 \mathbf{T}_m^n である。

定理 3.4 ([2]) A を様相命題論理式とする。任意の *small category* \mathbf{C} に対して、

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}) \models S4.A \iff \mathbf{C}^\wedge \models Q-S4.A.$$

従って、任意の様相命題論理 L に対して、

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}) \models L \iff \mathbf{C}^\wedge \models Q-L.$$

である。

定理 3.5 様相命題論理 L について、 $L \nvdash \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ であり、その最小述語拡大 $Q-L$ が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、 \mathbf{T}_∞^1 を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明. $L \not\models \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ から $\mathbf{T}_1^1 \models L$ がわかる ([2]) ので、定理 3.4 より $(\mathbf{M}_1^1)^\wedge \models Q-L$ である。 \mathbf{M}_1^1 -set X と interpretation I を

$$X(\mathbf{M}_1^1) = \{a, b, c\}$$

$$X(\varepsilon) = id_{\{a,b,c\}} \quad X(1) = f \quad (f(a) = f(b) = f(c) = c)$$

$$I(P_1^2) = \{\langle a, b \rangle, \langle c, c \rangle\} \quad I(P_1^1) = \{\langle b \rangle\}.$$

とすると、 $\models \Box P_1^2(a, b)$ かつ $\models \Box \neg P_1^1(c)$ であり、また、 f から $\models \Diamond \Box \neg P_1^1(b)$ がわかるので、 $\models \Box P_1^2(a, b) \wedge \neg P_1^1(a) \wedge P_1^1(b) \wedge \Diamond \Box \neg P_1^1(b)$ である。さらに、もし、 $\models \neg P_1^1(u)$ ならば $u \neq b$ だから I の定義によって $\not\models P_1^2(a, u)$ となるので、 $\not\models \exists u \{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(a, u)\}$ である。従って、

$$\begin{aligned} & \not\models \Box P_1^2(a, b) \wedge \neg P_1^1(a) \wedge P_1^1(b) \wedge \Diamond \Box \neg P_1^1(b) \\ & \rightarrow \exists u \{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(a, u)\} \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} & \not\models \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \Box \neg P_1^1(y) \\ & \rightarrow \exists u \{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u)\}] \end{aligned}$$

である。この論理式は自由変数を含まず、また category \mathbf{M}_1^1 の object はただ1つなので、

$$\begin{aligned} & \not\models \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \Box \neg P_1^1(y) \\ & \rightarrow \exists u \{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u)\}] \end{aligned}$$

であり、したがって $(M_1^1)^\wedge \models Q-L$ から

$$\begin{aligned} Q-L \not\models & \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond \Box \neg P_1^1(y) \\ & \rightarrow \exists u \{ \neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u) \}] \end{aligned}$$

である。

$Q-L$ が Kripke bundle semantics に関して完全であるという仮定から、ある valuation \models 、論理式 P, A 、 $w \in W$ 、 $\pi^{-1}(w)$ の元の列 \vec{s} に対し

$$\begin{aligned} w \not\models & \Diamond \forall x \forall y [\Box P(x, y, \vec{s}) \wedge \neg A(x, \vec{s}) \\ & \wedge A(y, \vec{s}) \wedge \Diamond \Box \neg A(y, \vec{s}) \\ & \rightarrow \exists u \{ \neg A(u, \vec{s}) \wedge P(x, u, \vec{s}) \}] \end{aligned}$$

となるような、 $Q-L$ の Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が存在する。ここで、

$$\models Q(a, b) \iff \models Q(a, b) \wedge (R(c) \rightarrow R(c))$$

であるから、 \vec{s} の要素のすべては論理式 P と A の両方に実際に現れるとしてよい。

次に、Kripke frame $\langle W', R' \rangle$ を

$$W' = \{ \langle v, \vec{t} \rangle \mid w R v, v \in W, \vec{t} \text{ は } \vec{s} \text{ の } v \text{ における inheritor} \}$$

$$\langle v, \vec{t} \rangle R' \langle v', \vec{t}' \rangle \iff v R v' \text{ かつ } \vec{t}' \text{ は } \vec{t} \text{ の } v' \text{ における inheritor}$$

と定義すると、これは L の Kripke frame である。なぜなら、もし、 $\langle W', R' \rangle$

で valid でないような L で証明可能な命題論理式 B があるとする、 $\langle v, \vec{t} \rangle \not\models' B$

となる \models' と $\langle v, \vec{t} \rangle \in W'$ があり、各命題変数 p_j に対して $lh(\vec{s})$ 変数述語記号 $P_j(\vec{x})$ を取り、Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ の valuation \models'' を

$$v' \models'' P_j(\vec{t}') \iff \langle v', \vec{t}' \rangle \models' p_j.$$

と定義すれば、

$$v' \models'' C(P_j(\vec{t}')/p_j) \iff \langle v', \vec{t}' \rangle \models' C.$$

だから、 $v \not\models'' B(P_j(\vec{t}')/p_j)$ となって $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が L の Kripke bundle であることに矛盾するからである。

W' の作り方から、すべての $\langle v, \vec{t} \rangle \in W'$ に対して、

$$v \models \Box P(a, b, \vec{t}) \quad v \models \neg A(a, \vec{t}) \quad v \models A(b, \vec{t})$$

$$v \models \Diamond \Box \neg A(b, \vec{t}) \quad v \not\models \exists u \{ \neg A(u, \vec{t}) \wedge P(a, u, \vec{t}) \}$$

となるような $a, b \in \pi^{-1}(v)$ が存在する。ここで、

$$\langle v, \vec{t} \rangle < \langle v', \vec{t}' \rangle$$

$$\text{i.e. } \langle v, \vec{t} \rangle R' \langle v', \vec{t}' \rangle \text{ かつ } (\langle v', \vec{t}' \rangle R' \langle v, \vec{t} \rangle \text{ ではない})$$

となるような $\langle v', \vec{t}' \rangle \in W'$ が存在しないと仮定する。 $v \models \Diamond \Box \neg A(b, \vec{t})$ から、

$$\langle v, \vec{t} \rangle R' \langle v', \vec{t}' \rangle, \quad \langle v', \vec{t}' \rangle R' \langle v, \vec{t} \rangle, \quad v' \models \Box \neg A(b', \vec{t}')$$

となるような $A(b, \vec{t})$ の v' における inheritor $A(b', \vec{t}')$ と $\langle v', \vec{t}' \rangle \in W'$ があるので、 $A(b', \vec{t}')$ の inheritor $A(c, \vec{t})$ に対して、 $v \models \neg A(c, \vec{t})$ で

ある。もし、 $b \in \vec{t}$ ならば $b = c$ であるが、これは $v \models A(b, \vec{t})$ と $v \models \neg A(c, \vec{t})$ に矛盾するので、 $b \notin \vec{t}$ である。 $v \models A(b, \vec{t})$ と $v \models \neg A(a, \vec{t})$ から $a \neq b$ なので、 $P(a, c, \vec{t})$ は $P(a, b, \vec{t})$ の inheritor である。よって、 $v \models \Box P(a, b, \vec{t})$ から $v \models P(a, c, \vec{t})$ が導かれるが、これは、 $v \not\models \exists u \{ \neg A(u, \vec{t}) \wedge P(a, u, \vec{t}) \}$ に矛盾する。したがって、すべての $\langle v, \vec{t} \rangle \in W'$ に対して

$$\langle v, \vec{t} \rangle < \langle v', \vec{t}' \rangle$$

となる $\langle v', \vec{t}' \rangle \in W'$ が存在するので、 W' が \mathbf{T}_∞^1 を局所的に埋め込める L の frame である。■

定理 3.6 様相命題論理 L について、 $L \not\models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ であり、その最小述語拡大 $Q-L$ が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、 \mathbf{T}_∞^2 を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明.

$$\begin{aligned} & \Diamond \forall x \forall y [\Box P_1^2(x, y) \wedge \Diamond (\Box P_1^1(x) \wedge \Box \neg P_1^1(y)) \\ & \quad \wedge \Diamond (\Box \neg P_1^1(x) \wedge \Box P_1^1(y)) \\ & \quad \rightarrow \Diamond \exists u \exists u' (P_1^1(u) \wedge P_1^1(u') \wedge P_1^2(u, u'))]. \end{aligned}$$

が $Q-L$ において証明不可能であることを用いる。■

定理 3.7 様相命題論理 L について、 $L \vdash \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ かつ $L \not\models \Box (\Box p_1 \rightarrow p_2) \vee \Box (\Box p_2 \rightarrow p_1)$ であり、その最小述語拡大 $Q-L$ が *Kripke bundle se-*

$\mathbf{mantics}$ に関して完全ならば、すべての自然数 $n \geq 1$ に対して、 \mathbf{T}_n^2 を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明. $n \geq 1$ と、1変数述語 P_1^1, P_2^1, P_3^1 、2変数述語 P_1^2 をとり、すべての $v \in \mathbf{T}_n^2$ に対して、論理式 $F_v(x_1, \dots, x_{|v|})$ を次のように $n - |v|$ に関して帰納的に定義する。 $|v| = n$, $v = d_1 \cdots d_n$ なら

$$F_v = \bigvee_{i=1}^n \Box P_{d_i}^1(x_i);$$

とし、 $|v| = m - 1$ のとき

$$\begin{aligned} F_v = & \forall x_m \forall y_m [\Box P_1^2(x_m, y_m) \wedge \Diamond (\Box P_1^1(x_m) \wedge \neg F_{v*2}) \\ & \wedge \Diamond (\Box P_2^1(x_m) \wedge \neg F_{v*1}) \wedge P_3^1(x_m) \wedge \neg P_3^1(y_m) \\ & \rightarrow \Diamond \exists u \exists u' \{ \Box P_1^1(u) \wedge \Box P_2^1(u') \\ & \wedge (\neg \Box P_2^1(u) \vee \neg \Box P_1^1(u')) \wedge P_1^2(u, y_m) \wedge P_1^2(u', y_m) \}] \end{aligned}$$

とすると、 $\Diamond F_\varepsilon$ は Q - L で証明不可能である。 ■

定理 3.8 様相命題論理 L について、 $L \not\vdash \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ であり、その最小述語拡大 Q - L が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、 $L \subseteq S4.3$ である。

証明.

$$\begin{aligned} G_n : & [\bigwedge_{i < j} \Box (F_i \rightarrow \Diamond F_j)] \wedge [\bigwedge_{i > j} \Box (F_i \rightarrow \neg \Diamond F_j)] \\ & \wedge [\bigwedge_{i \neq j} \Box \neg (F_i \wedge F_j)] \wedge [\Box \bigvee_i F_i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge [\bigwedge_i \square \{F_i \rightarrow \exists x \exists y \{ \square P_i^2(x, y) \wedge \neg P_i(x) \wedge P_i(y) \\
& \quad \wedge \diamond (F_i \wedge \square \neg P_i(y)) \wedge \neg \exists u (\neg P_i(u) \wedge P_i^2(x, u)) \} \}] \\
& \rightarrow \neg \diamond F_1
\end{aligned}$$

が Q - L で証明不可能であることを用いる。

ただし、ここで、 P_1, \dots, P_n は 1 変数述語記号で P_1^2, \dots, P_n^2 は変数項述語記号 F_i は $\exists x_i P_i(x_i)$ のこととする。 ■

系 3.9 様相命題論理 L について、 $L \vdash \diamond p \rightarrow \square \diamond p$ であり、ある *finite connected frame* で L のある *theorem* が *valid* でなければ、その最小述語拡大 Q - L が *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

参考文献

- [1] S. Ghilardi, *Presheaf semantics and independence results for some non-classical first-order logics*, **Archive for Mathematical Logic** 29 (1989), pp. 125 - 136.
- [2] S. Ghilardi, *Incompleteness results in Kripke semantics*, **Journal of Symbolic Logic** 56 (1991), pp. 517 - 538.
- [3] V.B. Shehtman and D.P. Skvortsov, *Semantics of non-classical first order predicate logics*, in P. Petkov, ed., **Mathematical Logic**, Plenum Press, New York, 1990, pp. 105 - 116.

- [4] D.P. Skvortsov, *Some incompleteness results for predicate versions of propositional logics*, Manuscript, 1991.
- [5] T. Shimura, *Kripke bundle incompleteness of super-intuitionistic predicate logic*.
- [6] N.-Y. Suzuki, *Kripke bundles for intermediate predicate logics and Kripke frames for intuitionistic modal logics*, **Studia Logica**, 49(1990), pp.289-306.
- [7] N.-Y. Suzuki, *Some results on the Kripke sheaf semantics for super-intuitionistic predicate logics*, **Studia Logica**, 52(1993), pp.73-94.